Beispiel für einen Cantor'schen Zirkelschluss

Einleitung

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist eine Individualanordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 wie sie etwa in "Denksysteme ohne Widerspruch" aus der Website www.fam.tuwien.ac.at/~wolff beschrieben ist. Diese Arbeit wird als bekannt vorausgesetzt. In ihr wird gezeigt, dass die Mächtigkeit der Menge **R** der reellen Zahlen gleich $\aleph_0$ ist, also gleich der Mächtigkeit der Menge **N** der natürlichen Zahlen.

Eine auf dem zweiten Diagonalargument von Cantor beruhende Kritik dieser Beschränkung der Mächtigkeit $\aleph = \aleph[R(0,1)]$, der Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, beruht darauf, dass nach Cantor zu jeder angeblich vollständigen Individualanordnung der Menge R(0,1) eine in dieser Anordnung nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 tatsächlich angegeben werden kann. Es handelt sich um eine sogenannte Diagonalzahl. Wir werden ein Beispiel für eine derartige Kritik angeben und nachweisen, dass eine solche Diagonal zahl **nicht widerspruchsfrei** definiert werden kann.

Definition einer Diagonalzahl

Es sei a_n die n^{te} reelle Zahl zwischen 0 und 1 aus einer Individualanordnung AO$\{a_n\}$ der reellen Zahlen R(0,1) zwischen 0 und 1. Wir schreiben sie als unendliche Dezimalzahl

$$a_n = 0{,}a_{n1}a_{n2} \ldots a_{(n-1)n}a_{nn} \ldots..$$

Der Kritiker der Vollständigkeit der Individualanordnung bildet nun eine Diagonalzahl d mit

$$d = 0{,}d_1d_2 \ldots d_n \ldots..$$

wobei $d_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$ und $d_n = 2$ für $a_{nn} = 1$.

Beweis der Unvollständigkeit der Individualanordnung

Aus der Definition der Diagonalzahl d folgt $\forall n$: $d_n \neq a_{nn}$, daraus $\forall n{:}d \neq a_n$ und weiter $d \notin$ AO$\{a_n\}$. Andererseits ist $d \in R(0,1)$ per definitionem eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Damit wäre die Unvollständigkeit der Individualanordnung AO$\{a_n\}$ bewiesen.

Ein Kritiker hat konkret folgendermaßen argumentiert: Es gibt zwei Arten von reellen Zahlen zwischen 0 und 1: Solche, die endlich definierbar sind (Beispiel π) und solche, die das nicht sind, letztere z.B. zu gewinnen durch unendliche Betätigung eines 10fächrigen Roulettes. Von ihnen lässt sich keine einzige praktisch angeben. Dennoch gibt es überabzählbar viele und alle diese sind nicht in AO$\{a_n\}$ enthalten.

Das aktual Unendliche und der Zirkelschluss in dieser Beweisführung

Die Diagonalzahl d liegt erst dann als Zahl vor, wenn alle ihre Dezimalstellen bekannt sind. Liegen nur die ersten n Dezimalstellen vor dann ist d bei noch so großem n genau so wenig bekannt wie π, wenn man von ihm nur die ersten n Dezimalstellen kennt. π ist als Dezimalzahl nur potenziell unendlich darzustellen. **Eine aktual unendliche Darstellung ist nicht möglich.**

Will man d tatsächlich mit allen a_n der Individualanordnung vergleichen, wie dies für die Beweisführung der Unvollständigkeit notwendig wäre, dann müssten zum Zeitpunkt des Vergleiches alle möglichen a_n tatsächlich vorliegen. Dies kann aber in keinem endlichen Zeitpunkt der Fall sein. Die Individualanordnung $AO\{a_n\}$ enthält daher nur potenziell unendlich viele a_n.

Der Versuch, die Diagonalzahl d so zu definieren, dass sie einerseits als unendliche Dezimalzahl $d = 0{,}d_1d_2 \ldots d_n \ldots..$ dargestellt werden kann und andererseits $\forall n$: $d_n \neq a_{nn}$ gilt, führt zu einem Widerspruch. Aus der Darstellung $d = 0{,}d_1d_2 \ldots..$ folgt nämlich zunächst nach Definition von d die Forderung $\forall n$: $d_n \neq a_{nn}$ und weiter $d \notin AO\{a_n\}$. Durch die Behauptung des Kritikers in irgendeinem Zeitpunkt T, d sei eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, erhält d nach Definition der Individualanordnung einen Platz in ihr , so dass $d \in AO\{a_n\}$ gilt. Damit ist der Widerspruch in der Beweisführung gezeigt.

Es darf dabei jedoch nicht übersehen werden, dass die hier untersuchten Mengen $\{a_n\}$ zwar in einer Individualanordnung abzählbar angeordnet werden können, dass sie aber in keinem endlichen Zeitpunkt tatsächlich **vollständig** vorliegen, denn es kann in keinem endlichen Zeitpunkt auf jedes einzelne a_n zugegriffen werden wie dies für die Bildung von d notwendig wäre.

Das zweite Cantor'sche Diagonalargument behandelt hingegen die Anordnung $AO\{a_n\}$ als **aktual unendliche Darstellung** der Menge $\{a_n\}$, die jederzeit einen Zugriff auf jedes einzelne a_n gestattet und dies führt zum Widerspruch. Da Cantor die für seine Beweisführung notwendige Anordenbarkeit der Menge $\{a_n\}$ als nur potenziell unendliche Menge bereits voraussetzt handelt es sich bei seiner Argumentation um einen Zirkelschluss.